ΤΕΣΤ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ.

1) Έστω ο δ.χ $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Για τα ενδεχόμενα A, B και Γ του δχ Ω είναι $A\cap B=\{1,3,4\}$, $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$, $A-B=\{2,6\}$ και το σύνολο $\Gamma=\left\{x\in\Omega \,/\, \frac{x+1}{x-1}\geq 2\right\}$)

α. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A), P(B), P(\Gamma)$

β. Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το B και όχι το Γ

γ. Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα από τα B και Γ.

2) Έστω τα A, B ενδεχόμενα ενός δχ Ω ώστε να ισχύουν

- η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα A και B είναι $\frac{7}{8}$
- οι πιθανότητες $P(B)$ και $P(A\cap B)$ δεν είναι ίσες και ανήκουν στο σύνολο $X=\left\{\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right\}$

α. Να βρεθούν οι πιθανότητες $P(B)$ και $P(A\cap B)$

β. Να βρεθεί η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A

γ. Να βρεθεί η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί <u>μόνο</u> το ενδεχόμενο A.

3) Να χαρακτηρίσετε ως σωστές ή λάθος οι προτάσεις

i. Αν $P(A)\neq P(B)$ τότε $A\neq B$ Σ ή Λ

ii. Αν A, B ξένα τότε A' και B' ξένα   Σ ή Λ

iii. Αν A, B ασυμβίβαστα τότε $P(A)\leq P(B')$ Σ ή Λ

ΛΥΣΕΙΣ ΤΕΣΤ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

1) α. $\Gamma = \left\{ x \in \Omega \,/\, \dfrac{x+1}{x-1} \geq 2 \right\}$ με $N(\Omega) = 10$

$$\frac{x+1}{x-1} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1-2(x-1)}{x-1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2x+1+2}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x+3}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow (3-x)\cdot(x-1) \geq 0$$

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$3-x$	$+$		$+$	0	$-$
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$
$\Gamma(x) \geq 0$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in (1, 3]$

άρα $\Gamma \subseteq \Omega$ τότε $\Gamma = \{2, 3\}$

έπειτα, δίνονται $A \cap B = \{1,3,4\}$, $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$
$A - B = \{2, 6\}$. Συνεπώς, βρίσκουμε τις πιθανότητες:

$$\boxed{P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{2}{10}}, \quad P(A \cup B) = \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{6}{10}$$

$$P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{3}{10}, \quad P(A-B) = \frac{N(A-B)}{N(\Omega)} = \frac{2}{10}$$

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{2}{10} \Leftrightarrow P(A) - \frac{3}{10} = \frac{2}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{P(A) = \frac{5}{10}}$$

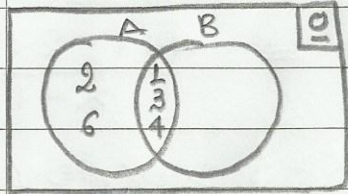
και $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{6}{10} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{10} + P(B) - \frac{3}{10} = \frac{6}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{P(B) = \frac{4}{10}}$$

β. $P(B-\Gamma) = P(B) - P(B\cap\Gamma)$ ①

ξέρουμε ότι, $\Gamma = \{2,3\}$, και $A\cap B = \{1,3,4\}$
επίσης $P(B) = \frac{4}{10}$, $A-B = \{2,6\}$ και $A\cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$



Αν δούμε τα $A\cap B$, $A-B$ και $A\cup B$ τότε το συμπέρασμα είναι ότι:
$B = \{1,3,4,5\}$

Έτσι, $B\cap\Gamma = \{3\}$

① ⇝ $P(B-\Gamma) = P(B) - P(B\cap\Gamma) =$
$= \frac{4}{10} - \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$

γ. $P((B-\Gamma)\cup(\Gamma-B)) = P(B-\Gamma) + P(\Gamma-B) =$
$= P(B) + P(\Gamma) - 2P(B\cap\Gamma) =$
$= \frac{4}{10} + \frac{2}{10} - 2\cdot\frac{1}{10} = \frac{4}{10}$.

2) α. • $P(A\cup B) = \frac{7}{8}$

• $P(B) \neq P(A\cap B)$ άρα $A\cap B \subset B \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow P(A\cap B) < P(B)$.
$\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$ άρα $P(A\cap B) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{3}{4}$

Ενώ το στοιχείο $\frac{5}{4}$ απορ. γιατί μεγαλύτερο της μονάδας

β. $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{7}{8} = P(A) + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A) = \frac{5}{8}$

γ. $P(A-B) = P(A) - P(A\cap B) = \frac{5}{8} - \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

(*) Το N = πλήθος συμβολίζεται και με $|\cdot|$